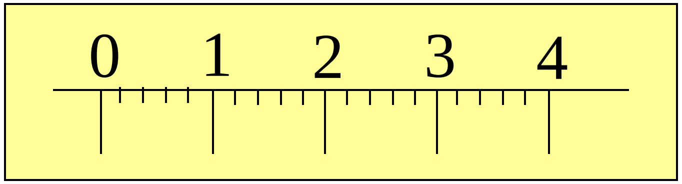
有効数字

<u>有効数字とは数値の中で意味のある数値のこと</u>

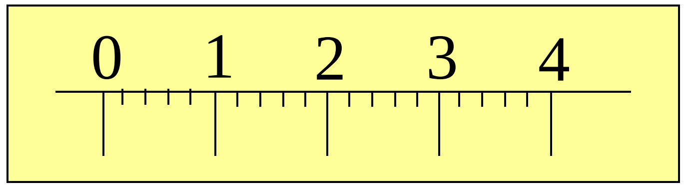
ある人が右のような定規（単位はcm）を使ってひもの長さを測りました。そしてそのひもの長さが下のような値であると報告しました。



<u>2.4238cm</u>

<u>この値をみてあなたはどう考えますか？</u>

実験での数値の読み取りは**最小目盛りの1/10**まで読む



この目盛りの場合、0.2刻みであるので小数点以下２桁までが意味のある数値となる。

2.4238cm → 2.42cm

有効数字は3桁

有効数字

意味のない数値

$$4.2\text{cm}$$

$$\Downarrow$$

$$4.15 \leqq 4.2 < 4.25$$

$$(4.2 \pm 0.05\text{cm})$$

<u>有効数字の最後の桁は誤差を半分含むことを意味する。</u>

精度

$$\pm 0.05 \div 4.2 \times 100 = \boxed{\pm 1.2\%}$$

次の数値の誤差幅を示し、精度を計算しなさい。

１）2.34m

２）0.8535g

３）786℃

有効数字の桁数①

１．1～9の数は全て有効数字になる。

　　36･･･有効数字2桁

　　2.345･･･有効数字4桁

２．0は数値中の位置により有効数字になる場合とならない場合がある。

(a)0以外の数字に挟まれた0は有効数字になる。

　　2.008･･･有効数字4桁

(b)小数点以下で、最も右側にある一つまたは連続した0は有効数字になる。

　　25.00･･･有効数字4桁

　　0.25000･･･有効数字5桁

有効数字の桁数②

(c)小数点以下の位を示すために使われている0は有効数字にならない。

0.123・・・有効数字3桁 → 1.23×10^{-1}

0.00123・・・有効数字3桁 → 1.23×10^{-3}

(d)整数で末端から連続している0は有効数字にならない。

7300・・・有効数字2桁 → 7.3×10^{3}

次の数値の有効数字の桁数を示せ。

(a) 345.6　(b) 0.002　(c) 1.203
(d) 345　(e) 68.0　(f) 0.39850
(g) 4×10^3　(h) 2.0001　(i) 0.0089
(j) 7.00×10^4

有効数字の加算、減算①

19.57-1.286について考える。

それぞれの数値は次の意味を持つ。

19.565≦19.57＜19.575・・・19.57±0.005

1.2855 ≦1.286＜1.2865・・・1.286±0.0005

そこで減算を考えると

(19.57±0.005)-(1.286±0.0005)=18.284±0.0055

=18.28

有効数字の加算、減算②

手順
①与えられた数値を全ての桁数を含めて計算する。
②末端の桁が一番大きいものの一つ下の桁を
　四捨五入して答えとする。

19.57-1.286=18.284 → 18.28

有効数字の乗算、除算

手順

①与えられた数値を全ての桁数を含めて計算する。

②答えの有効数字は数値の中の有効数字の桁数が最も小さいものになる。答えはその桁の一つ下の桁を四捨五入する。

$$1.23 \times 0.12345 = 0.1518435 \rightarrow 0.152$$

次の有効数字を考慮して計算を行いなさい。

(a) $43.67+27.4+0.0265$ (b) $156+32.7+4.38$

(c) $1.4651-0.53$ (d) $256-139.48$

(e) $1.48\times 39.1\times 0.312$ (f) $67.84\div 4.6$

(g) $$\frac{9.50\times 784}{1465}$$

(h) $$\frac{0.036\times 25.78}{1.4865\times 169}$$

有効数字の加算、減算
エクセルで行う場合

ROUND(数値、桁数）

ROUND(2.15,1) = 2.2
ROUND(2.149,1) = 2.1
ROUND(-1.475,2) = -1.48
ROUND(21.5,-1) = 20

有効数字の乗算、除算
エクセルで行う場合

①数値の対数（Log_{10}数値）を取り、小数点以下を切り捨てる。
（数値を$a \times 10^{b}$で表したときのbを求める）
②数値に$10^{-①}$を乗ずる。
（数値を$a \times 10^{b}$で表したときのa（1以上10未満）を求める）
③ROUND関数を用いて、小数点以下を有効数字の桁数-1の位置で四捨五入する。
④③で得られた数値に$10^{①}$を乗じて答えとする。

有効数字の乗算、除算
エクセルで行う場合

例　数値が25.368で有効数字３桁にする場合

① $\mathrm{Log}_{10}25.368=1.404286 \rightarrow 1$

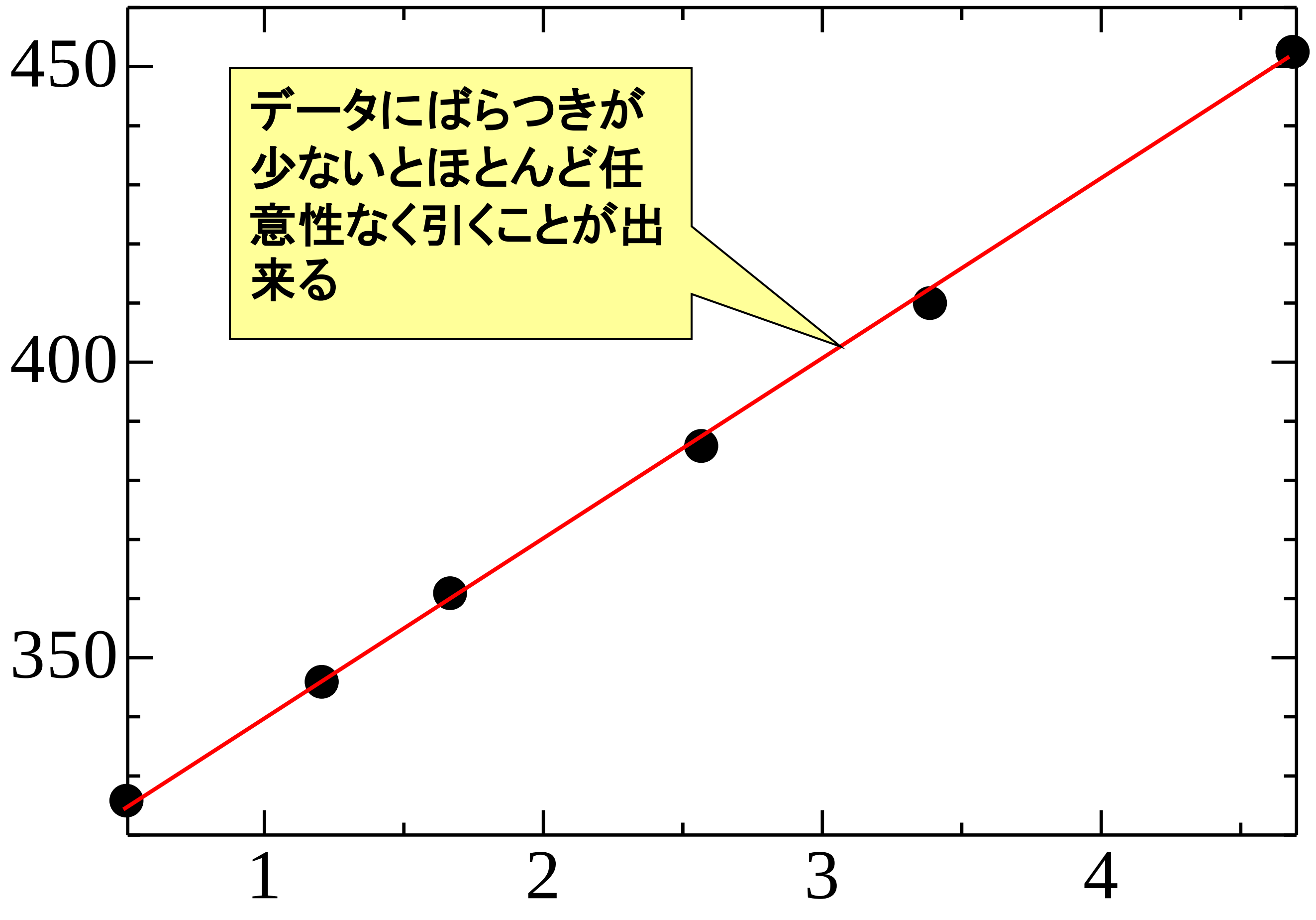
②$25.368 \times 10^{-1}=2.5368$

③$2.5368 \rightarrow 2.54$

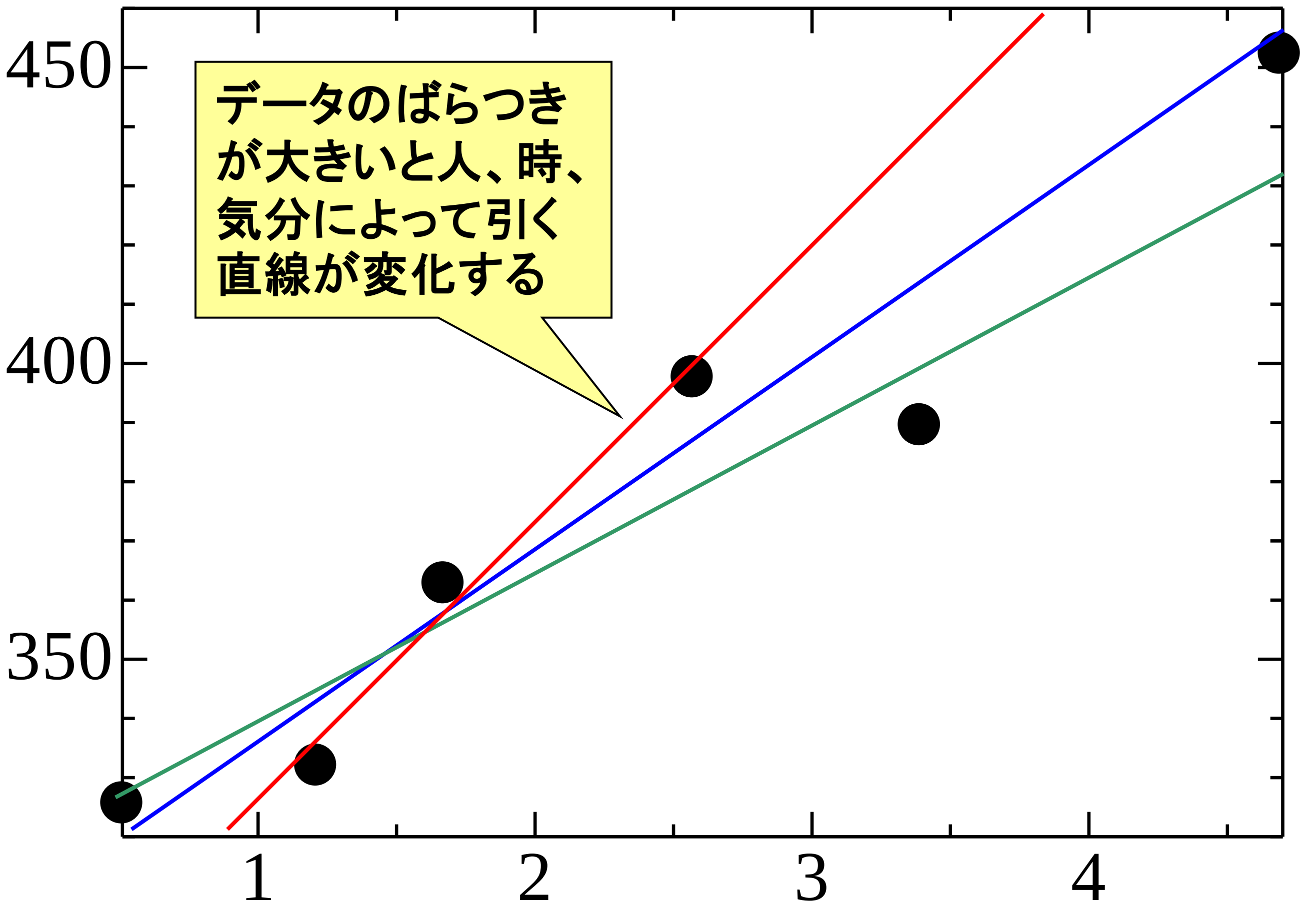
④$2.54 \times 10^{1}=25.4$

最小二乘法

グラフに直線を引く



グラフに直線を引く



どのように直線を引くと任意性がないか？

自分が直線を引くとすると何に注意して引く？

↓

全ての点が出来るだけ近くなるように

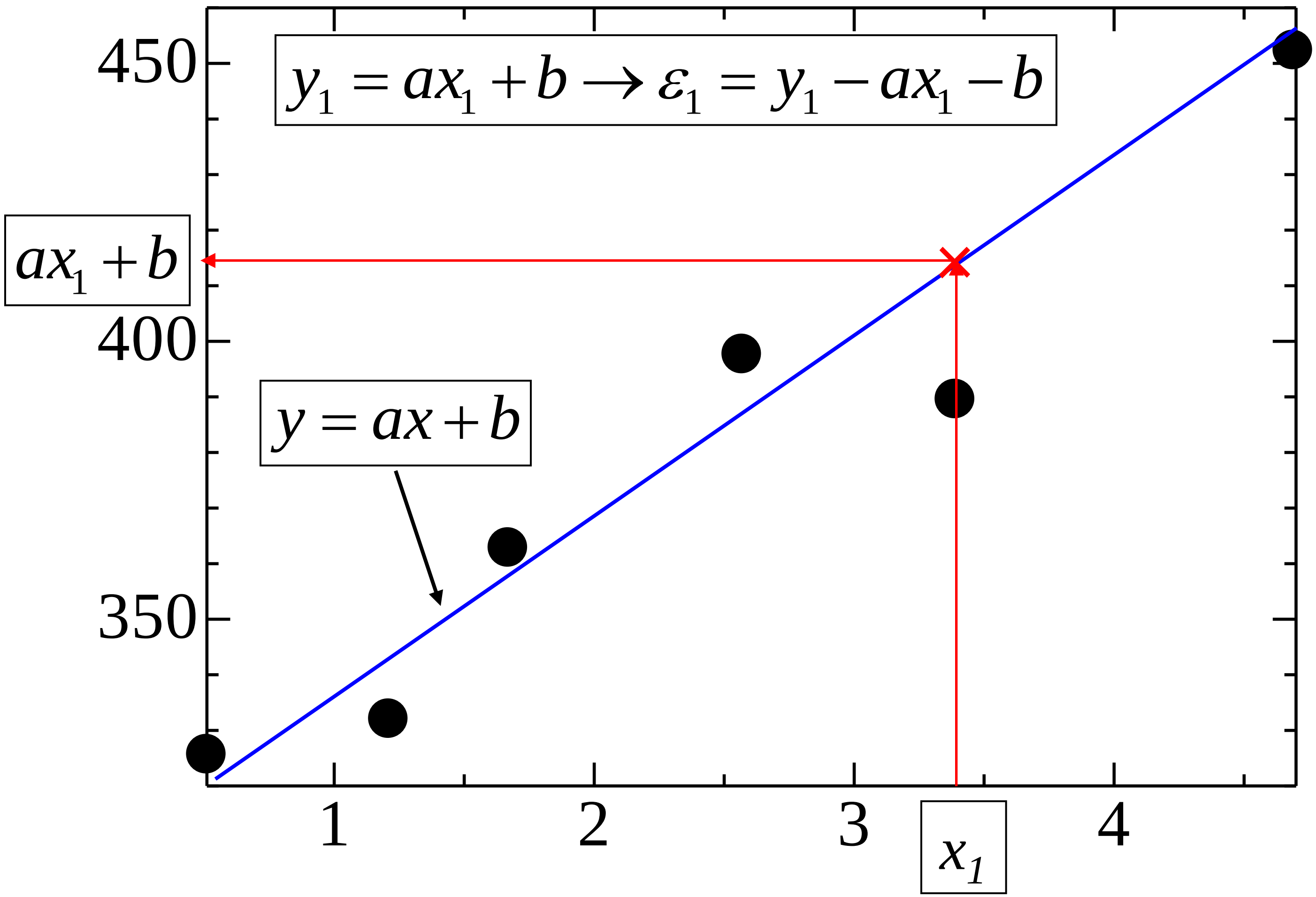
↓

定量的に言い換えると直線と点の差が最小になるように

↓

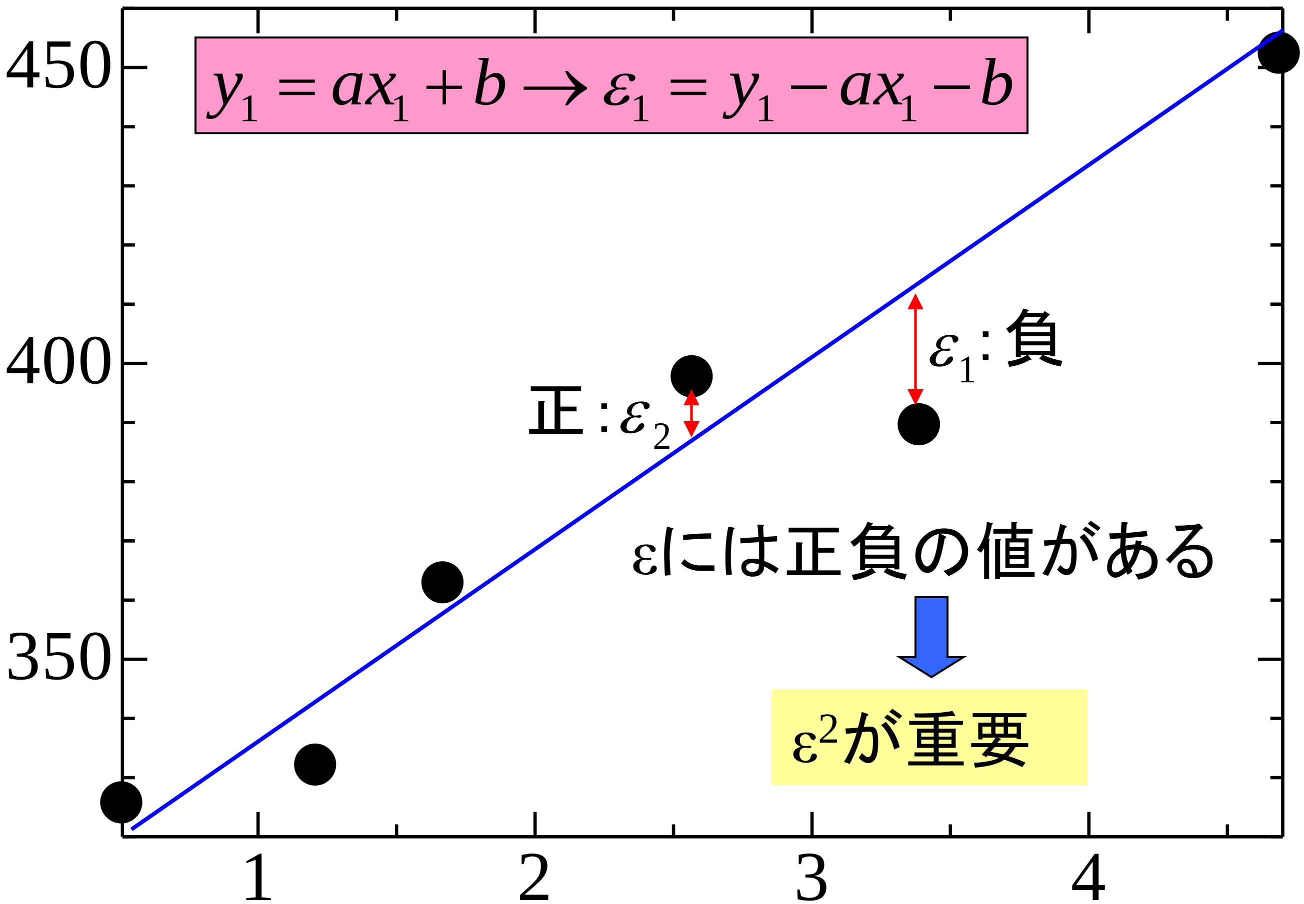
最小二乗法

点と直線の差とは？



$y_1 = ax_1 + b \rightarrow \varepsilon_1 = y_1 - ax_1 - b$
$ax_1 + b$
$y = ax + b$
x_1
450
400
350
1
2
3
4

点と直線の差とは？



$y_1 = ax_1 + b \rightarrow \varepsilon_1 = y_1 - ax_1 - b$
ε_1: 負
正 : ε_2
εには正負の値がある
ε^2が重要
450
400
350
1
2
3
4

$$y_1 = ax_1 + b \implies \epsilon_1 = y_1 - ax_1 - b$$

$$y_2 = ax_2 + b \implies \epsilon_2 = y_2 - ax_2 - b$$

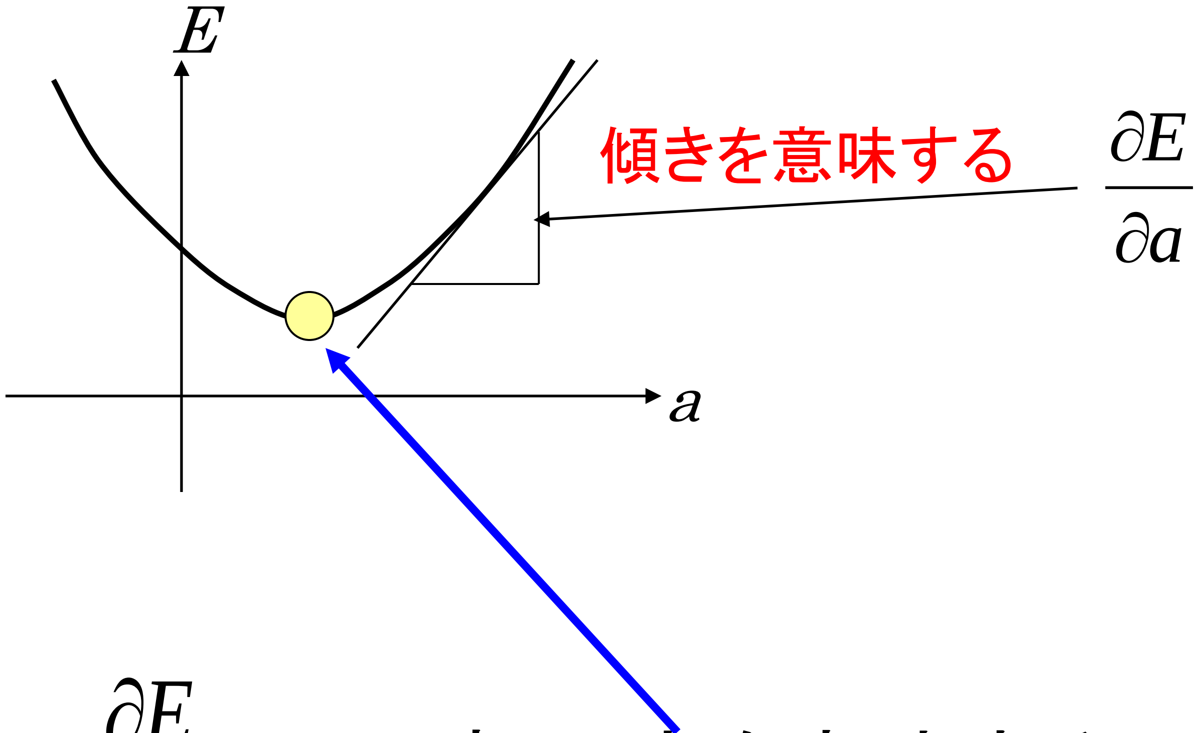
$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$y_n = ax_n + b \implies \epsilon_n = y_n - ax_n - b$$

$$
\begin{aligned}
E &= \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \bullet\bullet\bullet + \epsilon_n^2 \\
&= (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \bullet\bullet\bullet + (y_n - ax_n - b)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2
\end{aligned}
$$

Eが最小になるには次の条件が必要

$$
\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial E}{\partial b} = 0
$$



$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0$$ は極小点を意味する。

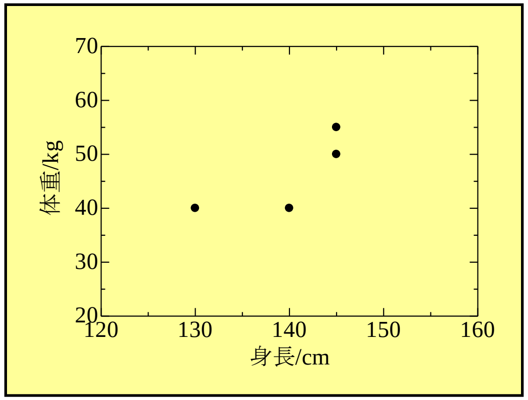
$$a=\frac{\left[(XY)_n - X_n Y_n\right]}{\left[(X^2)_n - X_n^2\right]}, \qquad b=\frac{\left[(X^2)_n Y_n - X_n (XY)_n\right]}{\left[(X^2)_n - X_n^2\right]}$$

$$X_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, (X^2)_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n}, (XY)_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$$

また、相関係数は次のように定義される。

$$r=\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}}$$

最小二乗法の計算手順



表を作成する

x	140	145	145	130	140
y	40	55	50	40	45

グラフを描く

計算用の表を作成する

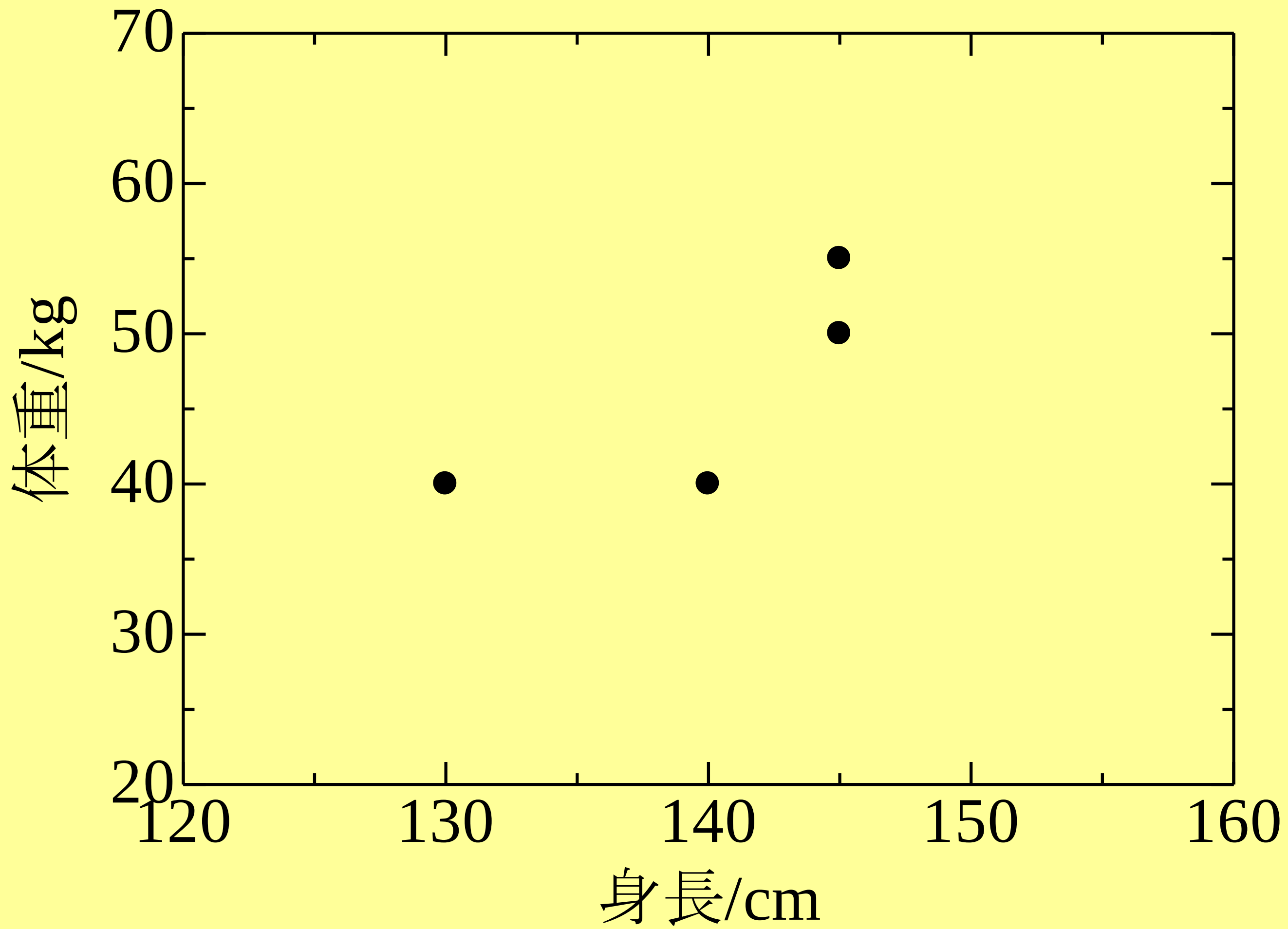
xy, x^2, y^2,総和、平均を計算する

a,b,rを計算する

検算する

本当にその値なのか？
グラフにプロットしてみる

	x	y	xy	x^2	y^2
	140	40	5600	19600	1600
	145	55	7975	21025	3025
	145	50	7250	21025	2500
	130	40	5200	16900	1600
	140	45	6300	19600	2025
計	700	230	32325	98150	10750
平均	140	46	6465	19630	2150


70
60
50
40
30
20
体重/kg
120
130
140
150
160
身長/cm

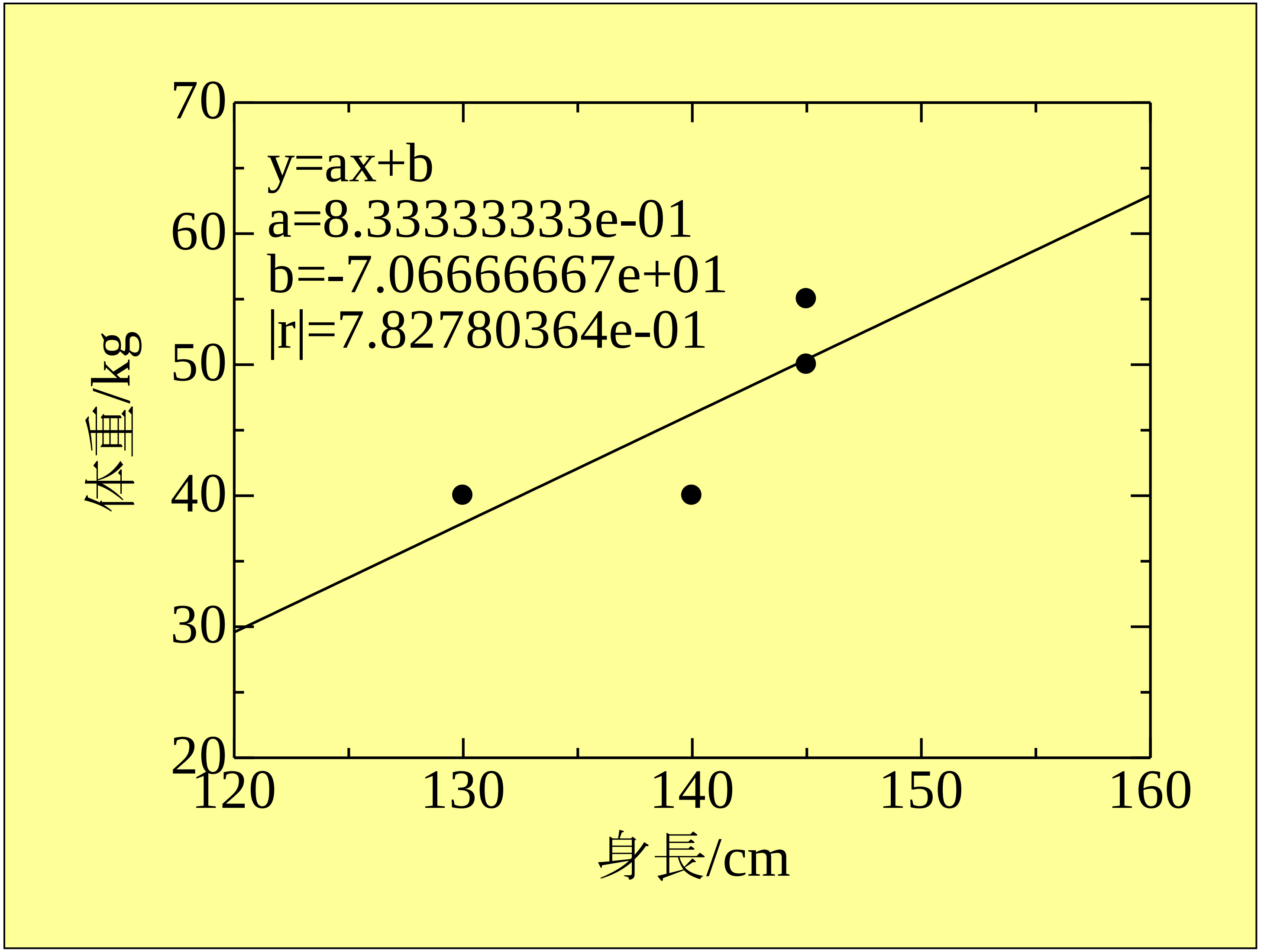
	x	y	xy	x^2	y^2
	140	40	5600	19600	1600
	145	55	7975	21025	3025
	145	50	7250	21025	2500
	130	40	5200	16900	1600
	140	45	6300	19600	2025
計	①700	② 230	③32325	④98150	⑤ 10750
平均	⑥140	⑦ 46	⑧ 6465	⑨19630	⑩ 2150

$$傾き = \frac{⑧ - ⑥ \times ⑦}{⑨ - ⑥ \times ⑥}$$

$$切片 = \frac{⑨ \times ⑦ - ⑥ \times ⑧}{⑨ - ⑥ \times ⑥}$$

$$傾き = \frac{n \times ③ - ① \times ②}{\sqrt{(n \times ④ - ① \times ①)(n \times ⑤ - ② \times ②)}}$$

ただし、nはデータ数である



y=ax+b
a=8.33333333e-01
b=-7.06666667e+01
|r|=7.82780364e-01
体重/kg
身長/cm
20
30
40
50
60
70
120
130
140
150
160